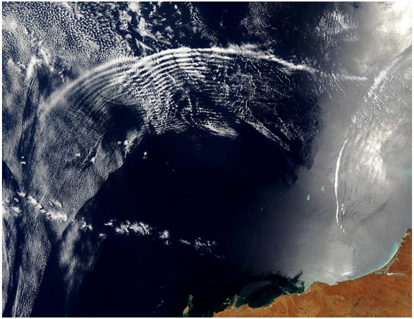
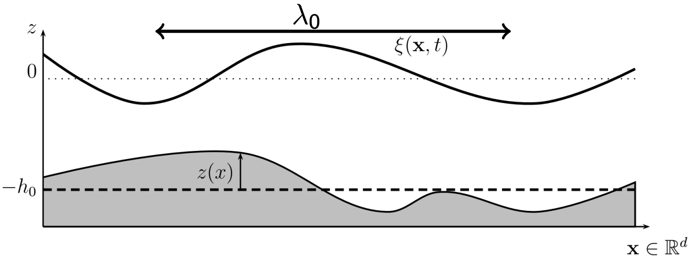
Journées de Modélisation des Vagues à Phases Résolues

4 - 6 octobre 2023, Ile d'Aix



Contexte et enjeux

Un bref aperçu des différents modèles

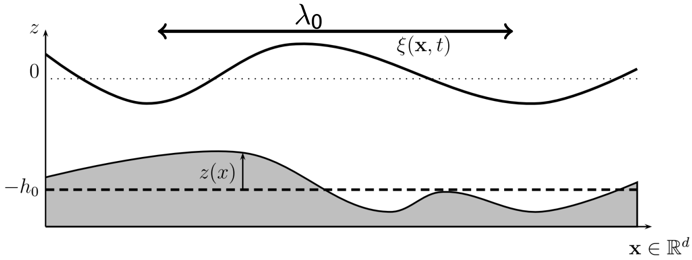


Free surface Euler equations

$$\nabla.\mathbf{v} = 0\,,$$
$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}.\nabla)\,\mathbf{v} = -\nabla P\,.$$

$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathsf{x}, z, t)$.
$\Omega_t = \left\{(\mathsf{x}, z) \in \mathbb{R}^{d+1}\,,\ -h_0 + z(\mathsf{x}) < z < \xi(\mathsf{x}, t)\right\}$.

Un bref aperçu des différents modèles



I - Modèles intégrés

Intégration selon la coordonnée verticale + BC :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{h}\int_{z(\mathbf{x})}^{\xi(\mathbf{x},t)} \mathbf{v}_h(\mathbf{x},z,t)\,dz\,.$$

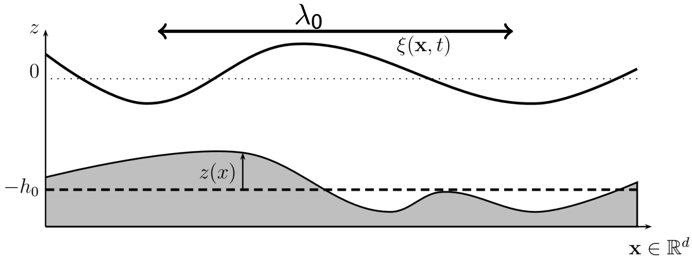
- ▷ $\mathcal{O}(1)$: Shallow Water
- ▷ $\mathcal{O}(\mu)$: Boussinesq, Serre-Green-Naghdi,...

$$\boxed{\mu = \left(\frac{h_0}{\lambda_0}\right)^2 \ll 1}$$

▷ *Exposé de Y.H. Lin sur BBM*

▶ D. Lannes, *The Water Waves problem : mathematical analysis and asymptotics*, 2013.

Un bref aperçu des différents modèles



II - Ecoulements potentiels

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, z, t) = \nabla \phi(\mathbf{x}, z, t)\,.$$

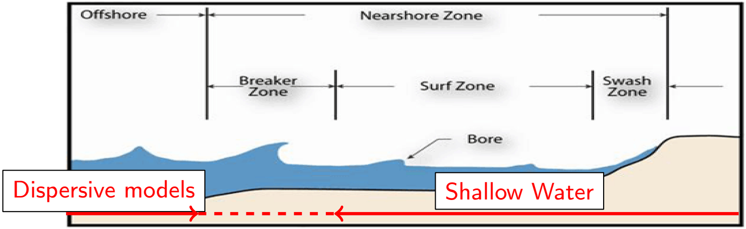
$$\psi(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, z = \xi(\mathbf{x}, t), t)\,.$$

▷ Opérateur DtN : équations d'évolution sur ξ et ψ.

▷ *Exposés de M. Benoit, O. Lafitte, M. Yates.*

▶ **D. Lannes**, *The Water Waves problem : mathematical analysis and asymptotics*, 2013.

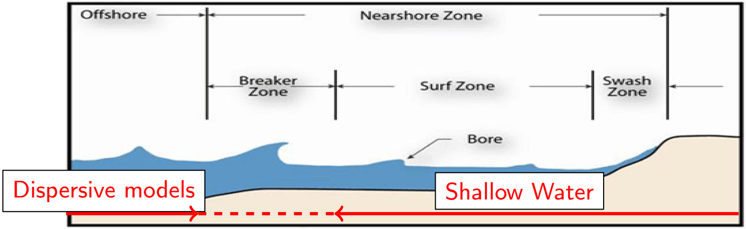
Contextes applicatifs : enjeux



- Stratification en densité.

▷ *Exposé de M. Adim, V. Duchêne.*

Contextes applicatifs : enjeux



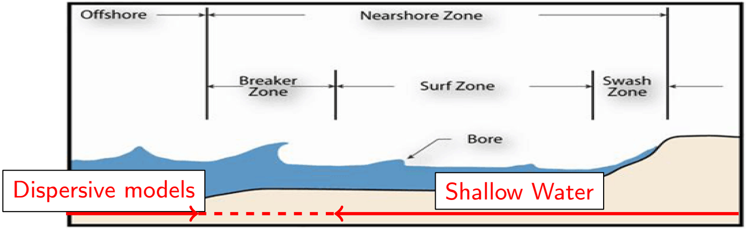
- Stratification en densité.

  ▷ *Exposé de M. Adim, V. Duchêne.*

- Conditions aux limites.

  ▷ *Exposés de P. Noble, M. Parisot, M. Rigal.*

Contextes applicatifs : enjeux



- Stratification en densité.

  ▷ *Exposé de M. Adim, V. Duchêne.*

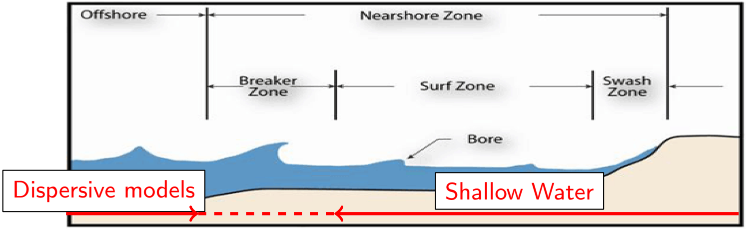
- Conditions aux limites.

  ▷ *Exposés de P. Noble, M. Parisot, M. Rigal.*

- Déferlement, couplage.

  ▷ *Exposés de G. Coulaud, E. Dormy, J.D. Galaz Mora, Y.C. Hung, M. Yates.*

Contextes applicatifs : enjeux



- Stratification en densité.

  ▷ *Exposé de M. Adim, V. Duchêne.*

- Conditions aux limites.

  ▷ *Exposés de P. Noble, M. Parisot, M. Rigal.*

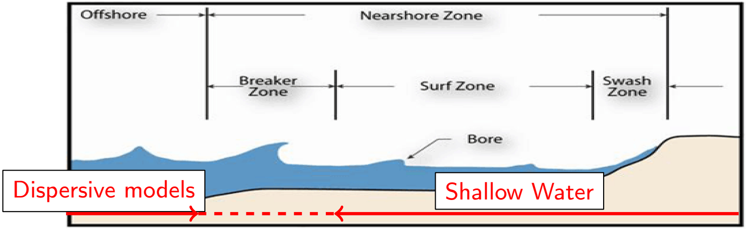
- Déferlement, couplage.

  ▷ *Exposés de G. Coulaud, E. Dormy, J.D. Galaz Mora, Y.C. Hung, M. Yates.*

- Dynamique en zone de surf, morphodynamique.

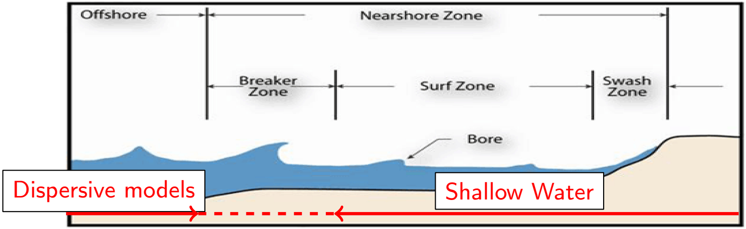
  ▷ *Exposés de F. Bouchette, R. Dupont, P. Marchesiello.*

Contextes applicatifs : enjeux



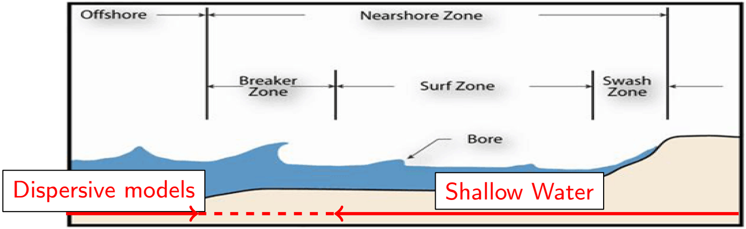
- Stratification en densité.
  ▷ *Exposé de M. Adim, V. Duchêne.*
- Conditions aux limites.
  ▷ *Exposés de P. Noble, M. Parisot, M. Rigal.*
- Déferlement, couplage.
  ▷ *Exposés de G. Coulaud, E. Dormy, J.D. Galaz Mora, Y.C. Hung, M. Yates.*
- Dynamique en zone de surf, morphodynamique.
  ▷ *Exposés de F. Bouchette, R. Dupont, P. Marchesiello.*
- Interaction fluide/structure.
  ▷ *Exposé de G. Beck.*

Contextes applicatifs : enjeux



- Stratification en densité.
  ▷ *Exposé de M. Adim, V. Duchêne.*
- Conditions aux limites.
  ▷ *Exposés de P. Noble, M. Parisot, M. Rigal.*
- Déferlement, couplage.
  ▷ *Exposés de G. Coulaud, E. Dormy, J.D. Galaz Mora, Y.C. Hung, M. Yates.*
- Dynamique en zone de surf, morphodynamique.
  ▷ *Exposés de F. Bouchette, R. Dupont, P. Marchesiello.*
- Interaction fluide/structure.
  ▷ *Exposé de G. Beck.*
- Modélisation, simulation opérationnelle.
  ▷ *Exposés de F. Couderc, P. Marsaleix, V. Roeber.*

Contextes applicatifs : enjeux



- Stratification en densité.
  ▷ *Exposé de M. Adim, V. Duchêne.*
- Conditions aux limites.
  ▷ *Exposés de P. Noble, M. Parisot, M. Rigal.*
- Déferlement, couplage.
  ▷ *Exposés de G. Coulaud, E. Dormy, J.D. Galaz Mora, Y.C. Hung, M. Yates.*
- Dynamique en zone de surf, morphodynamique.
  ▷ *Exposés de F. Bouchette, R. Dupont, P. Marchesiello.*
- Interaction fluide/structure.
  ▷ *Exposé de G. Beck.*
- Modélisation, simulation opérationnelle.
  ▷ *Exposés de F. Couderc, P. Marsaleix, V. Roeber.*
- Mesures, apprentissage.
  ▷ *Exposés de X. Bertin, K. Martins, J. Harris.*

Sur les modèles intégrés

Les équations SW et SGN

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0\,, \\ \partial_t hu + \partial_x\left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 + \underbrace{\frac{1}{3}h\ddot{h} + \Pi}_{\mathcal{O}(\mu)}\right) = -gh\partial_x z - \underbrace{f}_{\mathcal{O}(\mu)}. \end{cases}$$

Notations

$$\dot{h} = \frac{Dh}{Dt} = \partial_t h + u\partial_x h \quad , \quad \ddot{h} = \frac{D\dot{h}}{Dt}.$$

$$\Pi = \frac{h^2}{2}\frac{D[u\partial_x z]}{Dt} \quad , \quad f = h\partial_x z\left(\frac{\ddot{h}}{2} + \frac{D[u\partial_x z]}{Dt}\right).$$

Reformulation des équations SGN (1)

Opérateur elliptique

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0\,, \\ (I + \mathcal{T}[h,z])\left(\partial_t hu + \partial_x(hu^2)\right) + gh\partial_x\xi + h\mathcal{Q} = 0\,. \end{cases}$$

SW avec terme source

$$\begin{cases} \partial_t hu + \partial_x(hu^2) + gh\partial_x\xi = \mathcal{D}\,, \\ \mathcal{D} = gh\partial_x\xi - (I + \mathcal{T}[h,z])^{-1}\left(gh\partial_x\xi + h\mathcal{Q}\right)\,. \end{cases}$$

▶ **P. Bonneton** *et al.*, *A splitting approach for the fully nonlinear and weakly dispersive Green-Naghdi model*, 2011.

▶ **D. Lannes, F. Marche**, *A new class of fully nonlinear and weakly dispersive Green–Naghdi models for efficient 2D simulations*, 2015.

Reformulation des équations SGN (2)

Problème hyperbolique avec contrainte

$$\partial_t h + \partial_x hu = 0\,,$$
$$\partial_t hu + \partial_x \left(hu^2 + \frac{1}{2} g h^2 + \frac{1}{3} h^2 \ddot{h} \right) = 0\,.$$

Reformulation des équations SGN (2)

Problème hyperbolique avec contrainte

$$\partial_t h + \partial_x hu = 0\,,$$

$$\partial_t hu + \partial_x \left(hu^2 + \frac{1}{2} g h^2 + \frac{1}{3} h p \right) = 0\,.$$

On pose $p = h\ddot{h}$

Reformulation des équations SGN (2)

Problème hyperbolique avec contrainte

$$
\begin{aligned}
&\partial_t h + \partial_x hu = 0\,,\\
&\partial_t hu + \partial_x \left(hu^2 + \frac{1}{2} g h^2 + \frac{1}{3} h p \right) = 0\,,\\
&\partial_t hw + \partial_x (huw) = p\,,\\
&w = -h \partial_x u \qquad \rightsquigarrow \text{contrainte}
\end{aligned}
$$

Reformulation des équations SGN (2)

Cadre général

$$U = \begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix} \rightsquigarrow V = \begin{pmatrix} h \\ u \\ w \\ \dots \end{pmatrix},$$

$$\partial_t V + \partial_x A(V) = \Psi \qquad , \qquad V \in \mathbb{A}_h \,.$$

Splitting :

$$\begin{aligned} S_1 &: \partial_t V + \partial_x A(V) = 0 && \longrightarrow V^* \\ S_2 &: \partial_t V = \Psi && \longrightarrow V^{n+1} = \Pi_h[V^*] \end{aligned}$$

▷ *Exposé de M. Parisot.*

- E.D. Fernandez-Nieto, M. Parisot, Y. Penel, J. Sainte-Marie, *A hierarchy of dispersive layer-averaged approximations of Euler equations for free surface flows*, 2018.
- C. Escalante, T. Morales de Luna, M.J. Castro, *Non-hydrostatic pressure shallow flows : GPU implementation using finite volume and finite difference scheme*, 2018.
- S. Noelle, M. Parisot, T. Tscherpel, *A class of boundary conditions for time-discrete Green–Naghdi equations with bathymetry*, 2022.

Reformulation des équations SGN (3)

Problème hyperbolique - Relaxation

$$\partial_t h + \partial_x hu = 0\,,$$

$$\partial_t hu + \partial_x \left(hu^2 + \frac{1}{2} gh^2 + \frac{1}{3} h\color{red}{p} \right) = 0\,,$$

$$\partial_t hw + \partial_x (huw) = \color{red}{p}\,,$$

$$\color{blue}{w = -h\partial_x u \qquad \rightsquigarrow \text{contrainte}}$$

- **N. Favrie, S. Gavrilyuk**, *A rapid numerical method for solving Serre–Green–Naghdi equations describing long free surface gravity waves*, 2017.
- **V. Duchêne**, *Rigorous justification of the Favrie–Gavrilyuk approximation to the Serre-Green–Naghdi model*, 2019.
- **C. Escalante** ***et al***, *On high order ADER Discontinuous Galerkin schemes for first order hyperbolic reformulations of nonlinear dispersive systems*, 2019.
- **G. Richard**, *An extension of the Boussinesq-type models to weakly compressible flows*, 2021.

Reformulation des équations SGN (3)

Problème hyperbolique - Relaxation

$$
\begin{aligned}
&\partial_t h + \partial_x hu = 0\,,\\
&\partial_t hu + \partial_x \left(hu^2 + \frac{1}{2} g h^2 + \frac{1}{3} h p \right) = 0\,,\\
&\partial_t hw + \partial_x (huw) = p\,,\\
&\partial_t hp + \partial_x (hup) = -\lambda \left(w + h \partial_x u \right)\,, \qquad \lambda \gg 1\,.
\end{aligned}
$$

- **N. Favrie, S. Gavrilyuk**, *A rapid numerical method for solving Serre–Green–Naghdi equations describing long free surface gravity waves*, 2017.
- **V. Duchêne**, *Rigorous justification of the Favrie–Gavrilyuk approximation to the Serre-Green–Naghdi model*, 2019.
- **C. Escalante *et al***, *On high order ADER Discontinuous Galerkin schemes for first order hyperbolic reformulations of nonlinear dispersive systems*, 2019.
- **G. Richard**, *An extension of the Boussinesq-type models to weakly compressible flows*, 2021.

Approximation hyperbolique des équations SGN avec propriétés dispersives améliorées et conservation exacte de l'énergie

1) Motivation
2) Le modèle Leucothéa (LcT)
3) Mise en oeuvre numérique et validation

Cadre

Collaboration avec le SHOM (*Service Hydrographique et Océanographie de la Marine*)

Tolosa : Plateforme de simulation pour des modèles à surface libre, applications en océanographie côtière et grande échelle (SW, SW multicouches et modèles dispersifs).

Contributeurs :

- **R. Baraille, M. Ciavaldini, F. Couderc, P. Noble, J.P. Vila** - Toulouse
- **B. Fabrèges, K. Msheik** - Lyon
- **F. Marche** - Montpellier
- **M. Kazakova, Y. C. Hung** - Chambéry
- **G.L. Richard** - Grenoble
- **V. Duchêne** - Rennes

Motivation

Equations SGN

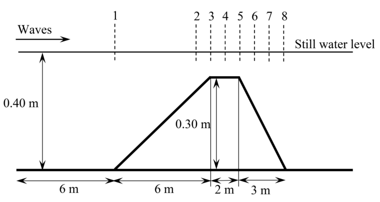
$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0\,, \\ (I + \mathcal{T}[h,z])\left(\partial_t hu + \partial_x(hu^2)\right) + gh\partial_x\xi + h\mathcal{Q} = 0\,. \end{array}\right.$$

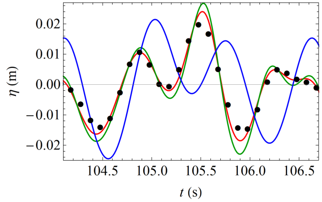
Relation de dispersion

$$\omega_{GN}^2(k) = gk^2 h_0 \left(\frac{1}{1+(kh_0)^2/3}\right)\,.$$

ω_{GN} *vs.* théorie linéaire (Stokes) : $\omega_S^2(k) = gk\tanh(kh_0)$.

Beji & Batjes test case





- S. Beji, J. Battjes, *Numerical simulation of nonlinear wave propagation over a bar*, 1994.

Amélioration des propriétés dispersives

Equations SGN

$$\partial_t h + \partial_x hu = 0\,,$$

$$\big(I + \underbrace{\mathcal{T}[h,z]}_{\mathcal{O}(\mu)}\big)\left(\partial_t hu + \partial_x(hu^2)\right) + gh\partial_x\xi + \underbrace{h\mathcal{Q}}_{\mathcal{O}(\mu)} = 0\,.$$

$$\Rightarrow \partial_t hu = -\partial_x(hu^2) - gh\partial_x\zeta + \mathcal{O}(\mu).$$

Introduction du paramètre α

$$\partial_t hu = \alpha\partial_t hu + (1-\alpha)\big(-\partial_x(hu^2) - gh\partial_x\xi\big) + \mathcal{O}(\mu)\,.$$

Equation de quantité de mouvement

$$\big(I + \alpha\mathcal{T}[h,z]\big)\left(\partial_t hu + \partial_x(hu^2) + \frac{\alpha-1}{\alpha}gh\partial_x\xi\right) + \frac{1}{\alpha}gh\partial_x\xi + h\mathcal{Q}_1 = 0\,.$$

▶ P. Bonneton *et al.*, *A splitting approach for the fully nonlinear and weakly dispersive Green-Naghdi model*, 2011.

Le modèle Leucothéa (LcT) - G.L. Richard, 2021

Version 1d, fond plat

$$
(LcT) \quad \begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0\,, \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 + hP) = 0\,, \\ \partial_t(hW) + \partial_x(huW) = \frac{3}{2}P\,, \\ \partial_t(hP) + \partial_x(huP) = -a^2(2W + h\partial_x u)\,. \end{cases}
$$

a : acoustic speed

W : depth-averaged vertical speed

P : depth-averaged non-hydrostatic pressure

▶ G. Richard, *An extension of the Boussinesq-type models to weakly compressible flows*, 2021.

Le modèle Leucothéa (LcT) - G.L. Richard, 2021

Version 1d, fond plat

$$
(LcT) \quad \begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0\,, \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 + hP) = 0\,, \\ \partial_t(hW) + \partial_x(huW) = \frac{3}{2}P\,, \\ \partial_t(hP) + \partial_x(huP) = -a^2(2W + h\partial_x u)\,. \end{cases}
$$

Energie

$$
\partial_t E + \partial_x \left((E + \frac{1}{2}gh^2 + hP)u \right) = 0\,,
$$

$$
E = \frac{1}{2}hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 + \frac{2}{3}hW^2 + \frac{1}{2a^2}hP^2\,.
$$

Le modèle Leucothéa (LcT) - G.L. Richard, 2021

Version 1d, fond plat

$$
(LcT) \quad \begin{cases}
\partial_t h + \partial_x(hu) = 0\,, \\
\partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 + hP) = 0\,, \\
\partial_t(hW) + \partial_x(huW) = \frac{3}{2}P\,, \\
\partial_t(hP) + \partial_x(huP) = -a^2(2W + h\partial_x u)\,.
\end{cases}
$$

Energie

$$
\partial_t E + \partial_x \left((E + \frac{1}{2}gh^2 + hP)u \right) = 0\,,
$$

Relation de dispersion

$$
\frac{h_0^2}{3a^2}\omega^4 - \omega^2 \left(1 + \frac{k^2 h_0^2}{3} \left(1 + \frac{gh_0}{a^2} \right) \right) + k^2 g h_0 = 0\,.
$$

Amélioration des propriétés dispersives

Introduction du paramètre α

$$(LcT_\alpha)\quad\begin{cases}\partial_t h + \partial_x(hu) = 0\,,\\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 + hP) = 0\,,\\ \partial_t(h\mathcal{W}) + \partial_x(hu\mathcal{W}) = \frac{3}{2}P + \frac{\alpha - 1}{2\alpha}gh^2\partial_x S\,,\\ \partial_t(hP) + \partial_x(huP) = -a^2(2\mathcal{W} + \alpha h\partial_x u)\,,\\ \partial_t(hS) + \partial_x(huS) = \partial_x(2h\mathcal{W})\,.\end{cases}$$

- ▷ Formellement : $LcT = LcT_\alpha + \mathcal{O}(\mu^2)$.
- ▷ Pas d'équation d'énergie pour LcT_α !
- ▷ On suppose $\alpha - 1 = \mathcal{O}(\mu^{1/2})$.

Conservation de l'énergie

Système final ($B = \sqrt{h}S$)

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0\,, \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 + hP) = 0\,, \\ \partial_t(h\mathcal{W}) + \partial_x(hu\mathcal{W}) = \frac{3}{2}P + \frac{\alpha - 1}{2\alpha}gh^{3/2}\partial_x B\,, \\ \partial_t(hP) + \partial_x(huP) = -a^2(2\mathcal{W} + \alpha h\partial_x u)\,, \\ \partial_t(hB) + \partial_x(huB) = \partial_x(2h^{3/2}\mathcal{W})\,. \end{cases}$$

Equation d'énergie

$$\partial_t E + \partial_x\left((E + \frac{1}{2}gh^2 + hP + \Pi_B)u\right) = 0\,,$$

$$E = \frac{1}{2}hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 + \frac{2}{3\alpha}h\mathcal{W}^2 + \frac{1}{2\alpha a^2}hP^2 + \frac{\alpha - 1}{6\alpha^2}gB^2\,,$$

$$\Pi_B = -\frac{2}{3}\frac{\alpha - 1}{\alpha^2}gh^{3/2}\mathcal{W}B\,.$$

Schéma numérique

Splitting hyperbolique / acoustique

$$
\begin{cases}
\partial_t h + \partial_x (hu) = 0\,,\\
\partial_t (hu) + \partial_x (hu^2 + \frac{1}{2} gh^2 + hP) = 0\,,\\
\partial_t (h\mathcal{W}) + \partial_x (hu\mathcal{W}) = \frac{3}{2} P + \frac{\alpha - 1}{2\alpha} gh^{3/2} \partial_x B\,,\\
\partial_t (hP) + \partial_x (huP) = -a^2 (2\mathcal{W} + \alpha h \partial_x u)\,,\\
\partial_t (hB) + \partial_x (huB) = \partial_x (2h^{3/2} \mathcal{W})\,.
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\partial_t h + \partial_x (hu) = 0\,,\\
\partial_t (hu) + \partial_x (hu^2 + \frac{1}{2} gh^2) = 0\,,\\
\partial_t (h\mathcal{W}) + \partial_x (hu\mathcal{W}) = 0\,,\\
\partial_t (hP) + \partial_x (huP) = 0\,,\\
\partial_t (hB) + \partial_x (huB) = 0\,.
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\partial_t h = 0\,,\\
\partial_t (hu) = -\partial_x (hP)\,,\\
\partial_t (h\mathcal{W}) = \frac{3}{2} P + \frac{\alpha - 1}{2\alpha} gh^{3/2} \partial_x B\,,\\
\partial_t (hP) = -a^2 (2\mathcal{W} + \alpha h \partial_x u)\,,\\
\partial_t (hB) = \partial_x (2h^{3/2} \mathcal{W})\,.
\end{cases}
$$

$$
\partial_t E + \partial_x \left((E + \frac{1}{2} gh^2) u \right) = 0\,. \qquad \partial_t E + \partial_x \left((hP + \Pi_B) u \right) = 0\,.
$$

Etape hyperbolique

Shallow Water avec transport passif

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0\,, \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2) = 0\,, \\ \partial_t(h\mathcal{W}) + \partial_x(hu\mathcal{W}) = 0\,, \\ \partial_t(hP) + \partial_x(huP) = 0\,, \\ \partial_t(hB) + \partial_x(huB) = 0\,. \end{cases}$$

$$\partial_t E + \partial_x \left((E + \frac{1}{2}gh^2)u \right) = 0\,.$$

Equivalent discret du bilan d'énergie :

$$E_K^{n+1} \leq E_K^n - \Delta t \left(\mathcal{G}_{K+1/2}^{SW} - \mathcal{G}_{K-1/2}^{SW} \right)\,.$$

▶ AD., F. Couderc, J.P. Vila, *An explicit asymptotic preserving low Froude scheme for the multilayer shallow water model with density stratification*, 2017.

▶ C. Berthon *et al.*, *Improvement of the hydrostatic reconstruction scheme to get fully discrete entropy inequalities*, 2019.

▶ C. El Hassanieh, M. Rigal, J. Sainte-Marie, *Implicit kinetic schemes for the Saint-Venant system*, 2023.

Etape acoustique (1)

Partie acoustique

$$
\begin{cases}
\partial_t h = 0\,, \\
\partial_t(hu) = -\partial_x(hP)\,, \\
\partial_t(h\mathcal{W}) = \dfrac{3}{2}P + \dfrac{\alpha - 1}{2\alpha} g h^{3/2} \partial_x B\,, \\
\partial_t(hP) = -a^2(2\mathcal{W} + \alpha h \partial_x u)\,, \\
\partial_t(hB) = \partial_x(2h^{3/2}\mathcal{W})\,.
\end{cases}
$$

$$
\partial_t E + \partial_x \left((hP + \Pi_B)u\right) = 0\,.
$$

Equivalent discret du bilan d'énergie :

$$
E_K^{n+1} \leq E_K^n - \Delta t \left(\mathcal{G}^{ac}_{K+1/2} - \mathcal{G}^{ac}_{K-1/2} \right)\,.
$$

Etape acoustique (1)

Partie acoustique

$$\begin{cases} \partial_t h = 0\,, \\ \partial_t(hu) = -\partial_x(hP)\,, \\ \partial_t(h\mathcal{W}) = \dfrac{3}{2}P + \dfrac{\alpha - 1}{2\alpha} g h^{3/2}\partial_x B\,, \\ \partial_t(hP) = -a^2(2\mathcal{W} + \alpha h \partial_x u)\,, \\ \partial_t(hB) = \partial_x(2h^{3/2}\mathcal{W})\,. \end{cases}$$

Reformulation

$$\begin{cases} \partial_t h = 0\,, \\ \partial_t u = -\dfrac{1}{h}\partial_x(hP)\,, \\ \partial_t \mathcal{W} = \dfrac{3}{2}\dfrac{P}{h} + \dfrac{\alpha - 1}{2\alpha} g \sqrt{h}\partial_x B\,, \\ \partial_t P = -a^2\left(2\dfrac{\mathcal{W}}{h} + \alpha \partial_x u\right)\,, \\ \partial_t B = \dfrac{1}{h}\partial_x(2h^{3/2}\mathcal{W})\,. \end{cases}$$

Etape acoustique (2)

Reformulation

$$\begin{cases} \partial_t h = 0\,, \\ \partial_t u = -\dfrac{1}{h}\partial_x(hP)\,, \\ \partial_t \mathcal{W} = \dfrac{3}{2}\dfrac{P}{h} + \dfrac{\alpha - 1}{2\alpha} g\sqrt{h}\partial_x B\,, \\ \partial_t P = -a^2\left(2\dfrac{\mathcal{W}}{h} + \alpha\partial_x u\right)\,, \\ \partial_t B = \dfrac{1}{h}\partial_x(2h^{3/2}\mathcal{W})\,. \end{cases}$$

Schéma numérique

$$\begin{cases} \dfrac{u_K^{n+1} - u_K^n}{\Delta t} = -\dfrac{1}{h_K}\partial_K^c(hP^{n+1})\,, \\ \dfrac{\mathcal{W}_K^{n+1} - \mathcal{W}_K^n}{\Delta t} = \dfrac{3}{2}\dfrac{P_K^{n+1}}{h_K} + \dfrac{\alpha - 1}{2\alpha} g\sqrt{h_K}\partial_K^* B\,, \\ \dfrac{P_K^{n+1} - P_K^n}{\Delta t} = -a^2\left(2\dfrac{\mathcal{W}_K^{n+1}}{h_K} + \alpha\partial_K^* u\right)\,, \\ \dfrac{B_K^{n+1} - B_K^n}{\Delta t} = \dfrac{1}{h_K}\partial_K^c(2h^{3/2}\mathcal{W}^{n+1})\,. \end{cases}$$

Etape acoustique (3)

Schéma numérique

$$\begin{cases} \dfrac{u_K^{n+1}-u_K^n}{\Delta t} = -\dfrac{1}{h_K}\partial_K^c(hP^{n+1})\,, \\ \dfrac{\mathcal{W}_K^{n+1}-\mathcal{W}_K^n}{\Delta t} = \dfrac{3}{2}\dfrac{P_K^{n+1}}{h_K} + \dfrac{\alpha-1}{2\alpha}g\sqrt{h_K}\partial_K^* B\,, \\ \dfrac{P_K^{n+1}-P_K^n}{\Delta t} = -a^2\left(2\dfrac{\mathcal{W}_K^{n+1}}{h_K} + \alpha\partial_K^* u\right)\,, \\ \dfrac{B_K^{n+1}-B_K^n}{\Delta t} = \dfrac{1}{h_K}\partial_K^c(2h^{3/2}\mathcal{W}^{n+1})\,. \end{cases}$$

$$\partial_K^* B = \frac{1}{\Delta x}\left(B^*_{K+1/2} - B^*_{K-1/2}\right)\,,\quad B^*_{K+1/2} = \bar{B}_{K+1/2} - c_B\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[h^{3/2}W\right]_{K+1/2}\,.$$

$$\partial_K^* u = \frac{1}{\Delta x}\left(u^*_{K+1/2} - u^*_{K-1/2}\right)\,,\quad u^*_{K+1/2} = \bar{u}_{K+1/2} - c_u\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[hP\right]_{K+1/2}\,.$$

- ▷ Etape 1 : Résolution **explicite** des équations sur $\mathcal{W}$ et P.
- ▷ Etape 2 : Evolution de B et u.

$$\text{Stabilité sous CFL : } \frac{\Delta t}{\Delta x}a\sqrt{\alpha} \le 1/2.$$

Perspectives autour du code Tolosa

Analyse numérique et schémas : bilan

		$\partial_x z = 0$	faible pente	cas général
1D	(LcT)	✓	✓	✓
	$(LcT)^{cons}_{\alpha}$	✓	✓	✗
2D NS	(LcT)	✓	(✓)	✗
	$(LcT)^{cons}_{\alpha}$	(✓)	(✓)	✗

Travaux en cours

- Validations numériques.
- Comparaisons SGN vs LcT.
- Etude amont (V. Duchêne, K. Msheik).
- Déferlement (Thèse de Yen Chung Hung, Chambéry).
- Ordre élevé (dG, MOOD,...)

Perspectives autour du code Tolosa

Analyse numérique et schémas : bilan

		$\partial_x z = 0$	faible pente	cas général
1D	(LcT)	✓	✓	✓
	$(LcT)^{cons}_{\alpha}$	✓	✓	✗
2D NS	(LcT)	✓	(✓)	✗
	$(LcT)^{cons}_{\alpha}$	(✓)	(✓)	✗

Travaux en cours

- Validations numériques.
- Comparaisons SGN vs LcT.
- Etude amont (V. Duchêne, K. Msheik).
- Déferlement (Thèse de Yen Chung Hung, Chambéry).
- Ordre élevé (dG, MOOD,...)

MERCI !